12 - Abril - 2011 *Tiempo: 2 horas*

EXAMEN: Sucesiones , series e integración

1. *(1pto.)* Calcular el límite de la sucesión con término general $a_n = \log\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\cos(n^3+7)$ $(log\ es\ el\ logaritmo\ neperiano)$

SOLUCIÓN

Calculamos primero el $\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+4}{n+2}\right) = \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\right]$=$\log[1] = 0$. Por otra parte la función Coseno está acotada con $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Esto nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\cos(n^3+7) = 0$$

2. *(2 ptos.)* Calcular el límite de la sucesión con término general: $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}}$

SOLUCIÓN

Expresamos el término general como $a_n = \left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}$ y, al tomar límites es $\lim_{n\to\infty} a_n = 1^\infty$. Esta indeterminación la resolvemos con el número e como sigue

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-1}-1\right)\frac{n^2+1}{2n}}$=$e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2n-1}\right)\frac{n^2+1}{2n}}$=$\sqrt[4]{e^5}$

3. *(1 pto.)* Determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

SOLUCIÓN

La comparamos en el límite con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Calculamos, entonces el límite

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}$=1>0. Esto demuestra la divergencia de la serie dada.

4. *(2,5 ptos.)* Dada la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, se pide: a) *(0,2ptos.)* determinar su centro y sus coeficientes, b) *(1 pto.)* calcular su radio de convergencia, c) *(0,2 ptos.)* calcular su intervalo de convergencia absoluta, d) *(0,2 ptos.)* calcular su intervalo de convergencia y e) *(0,2 ptos.)* decir dónde es divergente. f) *(0,7 ptos.)* Analizar la convergencia de la serie en el extremo superior del intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN

a) La serie está centrada en a=0 y los coeficientes son $a_n = \frac{2^{-n}n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$

b) El radio de convergencia se obtiene con la fórmula de D'Alambert como sigue $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2\cdot(2n+1)}=\frac{1}{4}$,
Por lo que el radio vale R=4

c) CA=$(-4,4)$

d) C=$(-4,4)$

e) La serie diverge en$(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

f) Estudiemos la serie para $x=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\left(\frac{4}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}2^n$. Se trata de una serie de términos positivos con $a_n=\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}2^n$. Por otra parte $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\frac{2^{n+1}}{2^n}=\frac{2\cdot(n+1)}{(2n+1)}=1+\frac{1}{2n+1}>1$. Por tanto $a_{n+1}>a_n>\cdots>a_1=2$,tratándose de una sucesión de términos positivos y monótona creciente, con lo cual $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$. Esto último demuestra que la serie no es convergente.

5. *(2 ptos.)* Calcular la siguiente integral indefinida:$\int\frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx$

SOLUCIÓN

La DFS del integrando es $\frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}=\frac{x+1}{(x^2+5)}+\frac{2}{(x-3)}$, con lo que $\int\frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx=\int\frac{x+1}{(x^2+5)}+$ $2x-3dx$, pero $2x-3dx$=log$x-32+c$, y

$$\int\frac{x+1}{(x^2+5)}dx={}^1/_2\int\frac{2x}{(x^2+5)}dx+{}^{\sqrt5}/_5\int\frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)^2+1\right)}dx=\log(x^2+5)^{1/2}+{}^{\sqrt5}/_5\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt5}+k.$$

Entonces $\int\frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx=\log(x-3)^2+\log(x^2+5)^{1/2}+{}^{\sqrt5}/_5\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt5}+k$

6. *(1,5 ptos.)* Calcular el área bajo la gráfica de $g(x)=\log 4x$ sobre el intervalo $\left[\frac{1}{4},\frac{e}{4}\right]$

SOLUCIÓN

Como $g'(x)=\frac{1}{x}>0,\forall x>0$, la función es creciente en su dominio $(0,+\infty)$. Y como $g\left(\frac{1}{4}\right)=\log 1=0$, la función es positiva en el intervalo dado $\left[\frac{1}{4},\frac{e}{4}\right]$. Por tanto el área pedida se calcula con la integral definida $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}}\log 4x\,dx$. Calculemos primero por partes la integral

$$\int\log 4x\,dx=\left\{\begin{matrix}u=\log 4x & du=\frac{dx}{x}\\ v=x & dv=dx\end{matrix}\right\}=x\log 4x-\int dx=x\log 4x-x+k$$

Y, entonces Área=$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}}\log 4x\,dx=x\log 4x-x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}}=\frac{e}{4}-\frac{e}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

EXAMEN: Sucesiones , series e integración

1. *(1pto.)* Calcular el límite de la sucesión con término general:
$a_n=\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\sin(n^3+5)$ $(log\ es\ el\ logaritmo\ neperiano\ y\ \sin\ es\ el\ Seno)$

SOLUCIÓN

Calculamos primero el $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\right]$=$\log[1] = 0$. Por otra parte la función Seno está acotada con $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Esto nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\sin(n^3+5) = 0$$

2. *(2 ptos.)* Calcular el límite de la sucesión con término general: $a_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)^n$

SOLUCIÓN

La base del término general converge a

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 1$, y, al tomar límites es $\lim_{n\to\infty} a_n = 1^\infty$. Esta indeterminación la resolvemos con el número e como sigue

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3. *(1 pto.)* Determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}$

SOLUCIÓN

La comparamos en el límite con la serie $\left(\frac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}} \sim \frac{n}{2n^{\frac{5}{3}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, que es divergente.

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{8n^5+7}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}$>0. Esto demuestra la divergencia de la serie dada.

4. *(2,5 ptos.)* Dada la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, se pide: a) *(0,2ptos.)* determinar su centro y sus coeficientes, b) *(1 pto.)* calcular su radio de convergencia, c) *(0,2 ptos.)* calcular su intervalo de convergencia absoluta, d) *(0,2 ptos.)* calcular su intervalo de convergencia y e) *(0,2 ptos.)* decir dónde es divergente. f) *(0,7 ptos.)* Analizar la convergencia de la serie en el extremo superior del intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN

g) La serie está centrada en a=0 y los coeficientes son $a_n = \frac{2^{-n} n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$

h) El radio de convergencia se obtiene con la fórmula de D'Alambert como sigue $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4}$,
Por lo que el radio vale R=4

i) CA=$(-4,4)$

j) C=$(-4,4)$

k) La serie diverge en$(-\infty,-4) \cup (4,\infty)$

12 - Abril - 2011 *Tiempo: 2 horas*

I) Estudiemos la serie para $x = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\left(\frac{4}{2}\right)^n$=$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} 2^n$. Se trata de una serie de términos positivos con $a_n = \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} 2^n$. Por otra parte $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{n!}\frac{2^{n+1}}{2^n}$=$\frac{2\cdot(n+1)}{(2n+1)}$=$1 + \frac{1}{2n+1} > 1$. Por tanto $a_{n+1} > a_n > \cdots > a_1 = 2$,tratándose de una sucesión de términos positivos y monótona creciente, con lo cual $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Esto último demuestra que la serie no es convergente.

5. *(2 ptos.)* Calcular la siguiente integral indefinida:$\int \frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx$

SOLUCIÓN

La DFS del integrando es $\frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)} = \frac{x+1}{(x^2+5)} + \frac{2}{(x-3)}$, con lo que $\int \frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx$=$\int \frac{x+1}{(x^2+5)} +$ $2x{-}3dx$, pero $2x{-}3dx$=log$x{-}32{+}c$, y

$\int \frac{x+1}{(x^2+5)}dx$=${}^1/_2 \int \frac{2x}{(x^2+5)}dx$+${}^{\sqrt{5}}/_5 \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)}dx$=$\log(x^2+5)^{1/2} + {}^{\sqrt{5}}/_5 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + k$.

Entonces $\int \frac{3x^2-2x+7}{(x^2+5)(x-3)}dx$=$\log(x-3)^2 + \log(x^2+5)^{1/2} + {}^{\sqrt{5}}/_5 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + k$

6. *(1,5 ptos.)* Calcular el área bajo la gráfica de $g(x) = \log x$ sobre el intervalo $[1, e]$

SOLUCIÓN

Como $g'(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$, la función es creciente en su dominio $(0, +\infty)$. Y como $g(1) = \log 1 = 0$, la función es positiva en el intervalo dado $[1, e]$. Por tanto el área pedida se calcula con la integral definida $\int_1^e \log x\, dx$. Calculemos primero por partes la integral

$$\int \log x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = \log x & du = \frac{dx}{x} \\ v = x & dv = dx \end{matrix}\right\} = x\log x - \int dx = x\log x - x + k$$

Y, entonces Área=$\int_1^e \log x\, dx = 1$